

ثابت أويلر e - Euler's Constant

د. الهاشمي علي أدراه*

مدخل:

من خلال الدراسة التاريخية نجد أن العدد الطبيعي e ربما كان اكتشافه مجرد صدفة نتيجة ظهوره بشكل واضح في كثير من التطبيقات التي أجريت من قبل بعض المتخصصين، ولكن بعد ذلك لعب هذا العدد دورا أساسيا في كثير من التطبيقات في جل فروع العلوم، ويعتبر العدد الطبيعي e له أهمية خاصة في العلوم الرياضية والتي بدورها تدخل في كثير من التطبيقات في كل فروع العلوم. سنهتم في هذه الورقة بدراسة العدد الطبيعي e من حيث اكتشافه وبعض استخداماته الهامة في كثير من العلوم. ومن خلال هذا العدد نتجت ما يعرف بالدالة الأسية e^x التي أهميتها ليست أقل من أهمية العدد e نفسه، حيث تعتبر هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية $\ln x$ وهو اللوغاريتم الطبيعي للأساس e . ونبين أقرب دالة أسية للدالة e^x وكذلك مدى انفراج وانحسار هذه الدالة كما سلطنا الضوء على بعض التطبيقات لهذه الدالة.

المقدمة:

e عدد حقيقي كثير الاستخدام رياضيا، حيث يظهر في كثير من المسائل الرياضية المستخدمة في عدة فروع من العلوم المختلفة؛ الفيزياء، الكيمياء، الإحصاء؛ الهندسة وغيرها. فعلى سبيل المثال في المسائل المتعلقة بالنمو والانحلال في الإحصاء والكيمياء وغيرها، وتسمى أحيانا بالمنحنى الجرسى (*Bell Curve*)، كذلك منحنى الأسلاك المتدلالية في بعض المسائل المتعلقة بالاحتمالات، كما أن لها علاقة بالدوال اللوغاريتمية، وتظهر كذلك في الأعداد المركبة (*Euler's Equation*).⁽¹⁾ وقيمتها

* كلية العلوم - الجامعة الأسمرية - زيتين - ليبيا

التقريبية 2.718281828459، وسبق أن حسبت إلى 869,894,101 خانة من قبل Sebastian Wedeniwsk. الجدول (1) يبين مجموعة من الخانات، على سبيل المثال، للعدد e والذي أعد من قبل Pascal Sabah و Xavier Gourdon⁽²⁾.

أول من اكتشف العدد e العالم الرياضي السويسري Leonhard Euler في القرن الثامن عشر مع العلم أن وجوده كان قد طبق في أعمال John Napier قبل ذلك واستخدم e كمعكوس للوغاريتم في سنة 1614، ولكنه لم يعره أي خصوصية. وأول من استخدم الحرف e بشكل خاص هو العالم Euler حيث هو أول حرف من اسمه العائلي ولذلك يطلق عليه في بعض الأحيان برقم أويلر أو ثابت أويلر⁽³⁾.

1. تعرف:

العدد e هو عدد حقيقي له عدة استخدامات في كافة المجالات العلمية، ويعرف رياضياً بعدة طرائق من أهمها النهايتين التاليتين:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (1)$$

$$e = \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + n\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (2)$$

والتي تعطينا قيمة e كما هو مبين في الجدولين التاليين:

N	10	100	1000	10000
	2.59374246	2.704813829	2.716923932	2.718145927

جدول (1) يبين قيمة e محسوبة بالنهاية المبينة في المعادلة (1)

N	e	N	E
-0.1	2.867971991	0.1	2.59374746
-0.01	2.731999026	0.01	2.704813891
-0.001	2.719642216	0.001	2.716923932
-0.0001	2.718417755	0.0001	2.718145927
-0.00001	2.71829542	0.00001	2.718268237

جدول (2) يبين قيمة e محسوبة بالنهاية المبينة في المعادلة (2)

والطريقة المثلى لحساب e ليس استخدام التعريف السابق ولكن يتم حسابها من

المجموع اللانهائي لمتسلسلة ماكلورين⁽⁴⁾:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

وذلك بوضع $x = 1$:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (3)$$

وإذا أردنا حساب عدد من الخانات وليكن k فعلياً حساب k+3 من الخانات ثم الجمع والبقية تساوي أصفاراً. استخدمت عدة طرق لحساب e، إحداها التي استخدمت في المثال السابق.

لقد برهن Euler أن e عدد غير قياسي، وبالتالي قيمة الكسر غير منتهية وغير مكررة، وبالتالي ليس من المهم حساب عدد الخانات لإيجاد قيمة e ولكن يعتمد عدد الخانات التي تعطي الدقة المطلوبة. كما أن e يعرف على أنه عدد غير جبري حيث إنه لا يمثل جذراً لأي معادلة كثيرة حدود وهي مثبتة من قبل العالم الفرنسي Charles Hermite سنة 1873.

2. علاقة العدد e باللوغاريتمات:

e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، حيث نعلم أن اللوغاريتم يعرف على النحو

التالي:

إذا كانت $a > 0$ عدد حقيقي، فإن a^u تكون معرفة لأي عدد حقيقي u،

وبالتالي فإن:

$$u = \log_a x \quad \text{إذا كان فقط إذا كان } a^u = x.$$

ويسمى هذا اللوغاريتم باللوغاريتم الطبيعي إذا كان الأساس (a) لهذه القيمة هي الثابت e . وبناء على ذلك فإن اللوغاريتم الطبيعي يعرف بالصيغة:

$$\ln(x) = \log_e(x),$$

من خواص اللوغاريتم الطبيعي⁽⁵⁾:

إذا كانت $p > 0, q > 0$ فإن:

$$\ln pq = \ln p + \ln q \quad -1$$

$$\ln \frac{p}{q} = \ln p - \ln q \quad -2$$

$$\ln p^r = r \ln p, \text{ لأي عدد حقيقي } r. \quad -3$$

تعريف:

$$\ln e = 1$$

كما أن e هي حل للمعادلة: $\ln x - 1 = 0$.

1/0!	=1/1	= 1.000000000000000000000000
1/1!	=1/1	= 1.000000000000000000000000
1/2!	=1/2	= 0.500000000000000000000000
1/3!	=1/6	= 0.166666666666666666666667
1/3!	=1/24	= 0.041666666666666666666667
1/5!	=1/120	= 0.008333333333333333333333
1/6!	=1/720	= 0.001388888888888888888889
1/7!	=1/5040	= 0.0001984126984126984126984
1/8!	=1/40320	= 0.0000248015873015873015873
1/9!	=1/362880	= 0.0000027557319223986890653
1/10!	=1/3628800	= 0.0000002755731922398589065
e	$= \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$	= 2.718281801

جدول (1) يبين e بحساب عشرة حدود من المتسلسلة (3).

ومن ضمن تعريفات اللوغاريتم الطبيعي الصيغة:

$$\ln(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{x^k - 1}{k} \right).$$

3. الدالة الأسية e^x :

الدالة e^x تعتبر من الدوال الهامة المستخدمة في كثير من العلوم المختلفة حيث تستخدم بصور مختلفة.

عند دراسة الدالة e^x نجد أن بيانها موضحا شكل 1 ، وتعتبر هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية.

بدراسة الدالة $f(x) = \ln x$ ، حيث $x > 0$ ، فإن $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} > 0$ والدالة $f(x)$ دالة متصلة وأحادية وبالتالي يوجد لها دالة عكسية $f^{-1}(x)$.

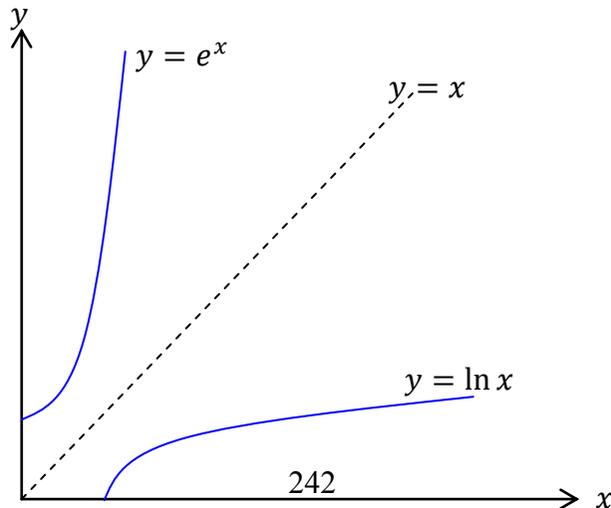
$$\ln(e^x) = x \ln e = x$$

$$f^{-1}(x) = e^x \quad \text{ومن ذلك فإن:}$$

$$y = e^x \quad \text{أي أنه إذا كانت}$$

$$\ln(e^y) = \ln(e^{\ln x}) = \ln x \quad \text{فإن:}$$

شكل 1 يوضح الدالة e^x كمعكوس للدالة $\ln x$ وعلاقتها بالدالة $y = x$ التي تعتبر المحور العاكس لهما.



شكل 1 بيان الدوال: $y = e^x$ ، $y = \ln x$ ، $y = x$ ، لقيم $x \geq 0$.

إن انفراج الدالة e^x يتوقف على قيمة x كما هو موضح شكل 2. إذا قورنت الدالة e^x مع بعض الدوال الأسية فنجد أن أقرب دالة أسية لهذه الدالة، على الأقل لقيم x القريبة من الصفر هي الدالة $y \cong 2^{1.44x}$ ، شكل 3 يوضح ذلك، ويمكن استنتاج ذلك من أساسيات الرياضيات، حيث نعلم أن:

$$e = 2.7182818$$

صحيحة لسبع خانات بعد الفاصلة، بوضع هذا الرقم على صورة 2 مرفوعة

لقوة a ، أي أن:

$$2.7182818 = 2^a$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين، وإيجاد قيمة a نحصل على:

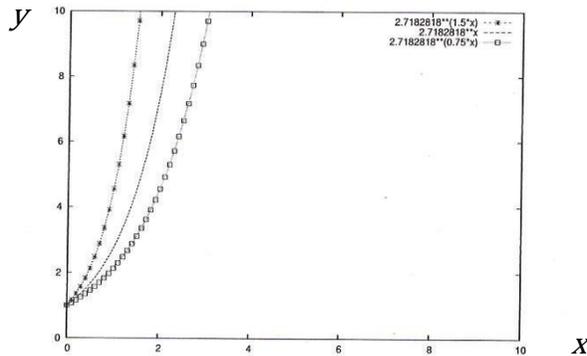
$$\ln(2.7182818) = a \ln 2,$$

$$a \cong 1.44$$

ومن ذلك نحصل على:

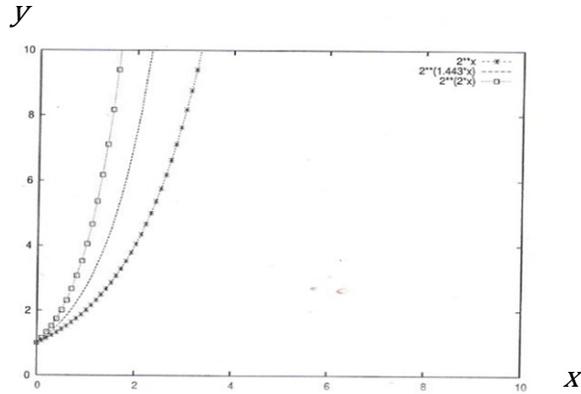
$$e^x = (2.7182818)^x \cong 2^{1.44x}.$$

أي أن:



شكل 2

انفراج وانحسار المنحنيات $e^{1.5x}$ (منحنى النجمة)، e^x (المنحنى المتقطع)، $e^{0.75x}$ (منحنى المربعات).



شكل 3

انفراج وانحسار المنحنيات 2^x (منحنى النجمة)، $2^{1.443x}$ (المنحنى المتقطع)، 2^{2x} (منحنى المربعات).

3.1 مشتقة الدالة الأسية e^x :

إن عملية اشتقاق الدالة e^x تعتبر من أبسط الإشتقاقات حيث إذا كانت:

$$y = e^x, \text{ فإن:}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

حيث إذا كانت $y = e^x$ ، فإن:

$$\ln y = x \ln e = x,$$

بالاشتقاق بالنسبة للمتغير x ، فإن:

$$\frac{dy}{y} = dx = e^x.$$

$$\frac{dy}{e^x} = dx \ln e,$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

وعملية التكامل، كما نعلم، هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق، أي أن:

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

حيث c ثابت التكامل.

4. بعض التطبيقات المستخدمة للدالة e^x :

تستخدم الدالة e^x في كثير من التطبيقات العلمية وفي تعريف الكثير من الدوال المختلفة فمثلا تستخدم الدالة e^x في حلول بعض المعادلات التفاضلية وخاصة المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية أو أكبر⁽⁶⁾. وتستخدم في تعريف الدوال الزائدية⁽⁷⁾؛ حيث دالتي الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي تعرفان على النحو:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

4.1 صيغة أويلر:

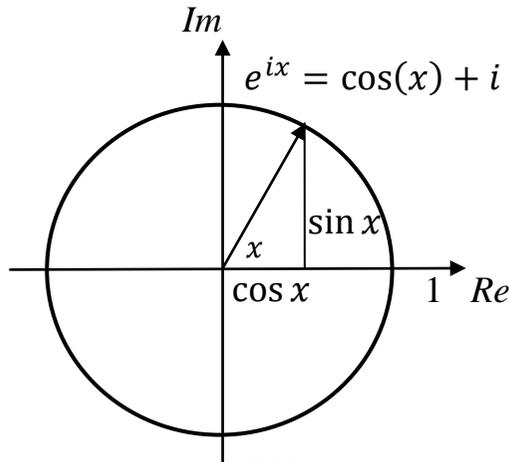
من ضمن استخدام الثابت e هو ما اكتشفه العالم السويسري Euler عام

1748 حيث صاغ التركيبة التالية:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x),$$

وتسمى بمعادلة Euler، حيث x عدد حقيقي وهي مقاسة بالتقدير الدائري،

حيث $i = \sqrt{-1}$ ⁽⁸⁾.



التمثيل البياني للدالة $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

برهان هذه النظرية يمكن تناوله على أكثر من نمط؛ سنستخدم متسلسلة

ماكلورين على سبيل المثال:

$$(1) e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, \quad (2)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad (3)$$

وهذه المتسلسلات متحققة لكل قيم z الحقيقية. وباستبدال $z = ix$ ، حيث

$i = \sqrt{-1}$ ، مع ملاحظة حقيقة أن:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} \dots,$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots,$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right),$$

بالمقارنة بالمتسلسلتين (2) و (3) نجد أن:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

ومن نتائج معادلة أويلر العلاقة التالية التي تربط بين خمس قيم حقيقية

التي تعتبر من الأهمية بمكان في علم الرياضيات؛ وهي:

$$e, \pi, i, 0, 1,$$

حيث:

$$e^{\pi i} = -1, \Rightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$$

4.2 قانون التغير الأسي:

يعرف هذا القانون بالمعادلة:

$$\frac{dy}{dx} = ky, \quad (1)$$

حيث y المتغير المراد حساب تغيره عبر فترة من الزمن t ، k ثابت⁽⁹⁾. ومن

المعادلة (1) فإن:

$$\frac{dy}{y} = kdt,$$

$$\ln y = kt + c,$$

$$y = Ae^{kt}.$$

ويستخدم هذا القانون في حساب النمو والانحلال في كثير من التطبيقات الكيميائية والحيوية وغيرها المتضمنة القيمة e ، حيث إذا كانت y موجبة وتزايدية فإن k موجبة، فنعتبر بالمعادلة (1) عن نسبة النمو. وإذا كانت y موجبة ولكن تناقصية فإن k سالبة، فتكون المعادلة (1) تصف الانحلال، ويسمى k بثابت النسبة للمعادلة (1). كما يستخدم هذا القانون المتضمن الدالة e^x في حساب الفائدة حيث k ترمز إلى عدد مرات إضافة الفائدة إلى المبلغ البدائي، t تشير إلى الزمن، ويكون هذا القانون على الصورة:

$$A(t) = A_0 e^{rt}.$$

كذلك تدخل الدالة e^x في صياغة قانون التبريد لنيوتن على النحو:

$$y = y_0 e^{-kt},$$

$$T - T_s = (T_0 - T_s) e^{-kt}, \quad \text{أو}$$

حيث T_0 هي قيمة T عند الزمن صفر، T حرارة الجسم، T_s درجة حرارة المحيط، و k ثابت⁽¹⁰⁾.

ومن التطبيقات التي تدخل فيها الدالة e^x حساب الدالة التي تصف جسم

متذبذب (معلق بسلك زنبركي) حيث الدالة التي تصف هذه الحالة هي:

$$u(t) = Ae^{at} \cos(\omega t) + Be^{at} \sin(\omega t),$$

حيث A, B, α, ω ثوابت. وإذا أردنا حساب السرعة لذلك الجسم، فنحصل عليه

بالاشتقاق بالنسبة للمتغير t لنحصل على:

$$\frac{du}{dt} = A[\alpha e^{at} \cos(\omega t) - \omega e^{at} \sin(\omega t)]$$

$$+ B[\alpha e^{at} \sin(\omega t) + \omega e^{at} \cos(\omega t)].$$

4.3 متسلسلة فورييه:

عند استخدام متسلسلات فورييه، تعتبر الدالة e^x من أهم الدوال المستخدمة لتعريفها، حيث تسهل عملية بناء هذا النوع من المتسلسلات التي لها استخدامات واسعة في التطبيقات الهندسية، والتي تصاغ على النحو:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2n\pi x i},$$

حيث نعلم أن متسلسلة فورييه تصاغ على النحو:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)),$$

والصورة المركبة لدالة الجيب و جيب التمام تكون على الصورة:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

وهي أيضا صور لدوال مركبة تظهر فيها الدالة e^x ، وباستخدام الصورة السابقة

في تعريف متسلسلة فورييه، نحصل على:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2n\pi x i}.$$

وتعرف بمتسلسلة فوريير المركبة (11).

4.4 الإحصاء:

تظهر الدالة e^x في كثير من التطبيقات الإحصائية، نذكر منها على سبيل

المثال لا الحصر توزيع بواسون المعروف بالعلاقة:

$$p(x; \lambda) = P(X = x), \\ = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

حيث λ هي معدل عدد النجاحات في الفترة الزمنية المعينة أو المنطقة

المحددة. كذلك دالة التوزيع الطبيعي:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

القيمة $(1/\sqrt{2})$ في هذه العلاقة تؤكد أن المساحة تحت منحنى الدالة $\phi(x)$

يساوي الواحد الصحيح.

5. نتائج وتوصيات:

لاحظنا ومن خلال هذه الورقة أن الثابت e ، رغم أن اكتشافه كان ربما صدفة و لكنه لعب دورا مفصليا في مواضيع مهمة في كثير من فروع العلوم، حيث بسط الكثير من المسائل، وقدم نماذج من التركيبات الميسرة للاستخدام. كما يوجد الكثير من الثوابت الرياضية والفيزيائية وغيرها، التي لا يمكن الاستغناء عنها في دراسة المواضيع البحثية والتطبيقية ومن هذه الثوابت الثابت e الذي سلطنا عليه الضوء من خلال هذه الدراسة المتواضعة، كذلك يوجد الثابت π ، وكذلك بعض الثوابت الأخرى مثل معامل الانتشار الحراري، ومعامل التمدد في المعادن وغيرها، سنعمل على دراسة بعضا منها في دراسات قادمة، ودراسة العلاقة بينها إن وجدت.

هوامش

- (1) Kenneth S. Miller, Partial Differential Equations In Engineering Problems, Prentice-Hall, Inc., USA.
- (2) Earl W., Swokowski, 1979, Calculus With Analytic Geometry, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts.
- (3) Ian N. Sneddon, 1957, Elements of Partial Differential Equations, McGraw-Hill Inc. USA.
- (4) Earl W., Swokowski, 1979, Calculus With Analytic Geometry, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts.
- (5) George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir, 1996, Calculus and Analytic Geometry, Addison Wesley Inc. USA.
- (6) Robert L. Borrelli, Courtney S. Coleman, 1996, Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc, Canada.
- (7) Earl W., Swokowski, 1979, Calculus With Analytic Geometry, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts.
- (8) Earl W., Swokowski, 1979, Calculus With Analytic Geometry, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts.
- (9) George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir, 1996, *Calculus and Analytic Geometry*, Addison Wesley Inc. USA.
- (10) Kenneth S. Miller, Partial Differential Equations In Engineering Problems, Prentice-Hall, Inc., USA.
- (11) Ralph P. Grimaldi, 1998, Discrete and combinatorial Mathematics, Addison Wesley Longman, Inc.